Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

(*Extrait d'une lettre de M.r* HERMITE *à M.r* BRIOSCHI).

. . . Au lieu d'effectuer suivant les puissances ascendantes de la variable x le développement des quantités :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

je poserai dans ce qui va suivre :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,\sum \alpha_n x^{2n+1},$$

$$\int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,\sum \beta_n x^{2n+1}.$$

De cette manière on obtient pour les coefficients α_n et β_n des polynômes rationnels et entiers par rapport au module, dont voici quelques propriétés.

En premier lieu, réduisons à un terme algébrique, et aux fonctions de première et seconde espèce, l'intégrale $\int_0^x \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, en posant cette égalité, où l'exposant n est entier, P un polynôme entier en x, A et B des constantes, savoir :

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = P\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} - A\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + B\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

on aura:

$$A = \beta_n, \qquad B = \alpha_n.$$

Une seconde propriété consiste en ce que les polynômes α_n et β_n sont les dénominateurs et numérateurs des réduites de la fraction continue:

$$\frac{k^2}{2(1+k^2)} - \frac{9k^2}{4(1+k^2)} - \frac{25k^2}{6(1+k^2)} - \frac{49k^2}{8(1+k^2)} - \text{etc.}\ldots$$

représentant le quotient:

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}.$$

Introduisons au lieu du module, la quantité $k + \frac{1}{k} = 2\varepsilon$, et posons:

$$\alpha_n = \frac{k^n . A_n}{3.5\ldots 2n+1}, \qquad \beta_n = \frac{k^{n+1} . B_n}{3.5\ldots 2n+1},$$

on aura ces relations:

$$2(n+1)\varepsilon \frac{dA_n}{d\varepsilon} - \frac{dB_n}{d\varepsilon} - 2n(n+1)A_n = (2n+1)^2 \frac{dA_{n-1}}{d\varepsilon},$$

$$2n\varepsilon \frac{dB_n}{d\varepsilon} + \frac{dA_n}{d\varepsilon} - 2n(n+1)B_n = (2n+1)^2 \frac{dB_{n-1}}{d\varepsilon};$$

et enfin les deux équations simultanées linéaires que voici:

$$\frac{dA_n}{d\varepsilon} = (1-\varepsilon^2)\frac{d^2B_n}{d\varepsilon^2} - \varepsilon\frac{dB_n}{d\varepsilon} + (n+1)^2 B_n,$$

$$-\frac{dB_n}{d\varepsilon} = (1-\varepsilon^2)\frac{d^2A_n}{d\varepsilon^2} - 3\varepsilon\frac{dA_n}{d\varepsilon} + n(n+2)A_n.$$